Chapitre 10 — Couples de va. aléatoires discrètes

Support

Dans toute cette partie, on supposera données deux variables aléatoires discrètes X et Y, où on notera $Supp(X) \subset \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $Supp(Y) \subset \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$, avec les x_i deux à deux distincts ou de probabilité nulle, de même que les y_j.

I Loi

I-1 Loi conjointe

Définition

On appelle *vecteur aléatoire discret* toute n-liste $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.d. $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé.
En particulier, si $n = 2$, on appelle (X_1, X_2) un *couple* de v.a.d..

Exemple 1 :
On lance un dé une infinité de fois et on note respectivement X et Y les première et deuxième apparitions de 6, avec $X = 0$ si 6 n'apparait jamais et $Y = 0$ si 6 n'apparait qu'une fois maximum. Alors (X, Y) est un couple de var. al. discrètes.

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. On appelle *support* du couple (X, Y) et on note $Supp\big((X,Y)\big)$ tout ensemble $S \subset (X,Y)(\Omega)$ tel que $P\big((X,Y) \in S\big) = 1$.

Remarque :
Trivialement, on a

$$Supp\big((X,Y)\big) = \{(X(w), Y(w)) \mid w \in \Omega\} \subset Supp(X) \times Supp(Y)$$

ou, de manière équivalente (en loi) **pour les variables discrètes**

$$Supp\big((X,Y)\big) = \{(x,y) \in Supp(X) \times Supp(Y) \mid P(X = x, Y = y) \neq 0\}$$

Exemple 2 :
On reprend l'exemple de X et Y resp. les première et deuxième apparitions de 6. Alors

$$Supp\big((X,Y)\big) \subset \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \mid y > x\} \cup \underbrace{\{(x,0) \mid x \in \mathbb{N}\}}_{\text{le 6 apparaît au plus une fois}}$$

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.. On appelle *loi du couple (X, Y)*, ou *loi conjointe des variables X et Y* l'application

$$\begin{array}{rrcl} P_{(X,Y)} : & Supp\big((X,Y)\big) & \to & [0;1] \\ & (x,y) & \mapsto & p\big((X = x) \cap (Y = y)\big) \end{array}$$

Exemple 3 :
Commençons à chercher la loi conjointe dans le cas de l'exemple précédent. (1ère et 2ème apparition de 6.)

- $Supp\big((X,Y)\big) = \{(n,k) \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n < k\} \cup \mathbb{N} \times \{0\}$.
- Soient $n, k \in Supp((X,Y))$. On cherche $p(X = n, Y = k)$:

⋆ Si $n = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p(X = n, Y = k) = 0$:

En effet, on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ et donc $p(X = 0) = 0$, d'où, comme $(X = n, Y = k) \subset (X = n)$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant p(X = 0, Y = k) \leqslant p(X = 0) = 0, \quad \text{d'où} \quad p(X = n, Y = k) = 0$$

⋆ Si $1 \leqslant n < k$, alors $p(X = n, Y = k) = q^{k-2}p^2$, où $p = 1/6$ et $q = 1 - p$:

En effet, posons A_i ="le 6 apparaît au rang i." Alors

$$p(X = n, Y = k) = p(\overline{A_1} \cap \dots \overline{A_{n-1}} \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}} \dots \overline{A_{k-1}} \cap A_k)$$

puis par indépendance des A_i et parce que $p(A_i) = \frac{1}{6}$, on a bien

$$p(X = n, Y = k) = \underbrace{q \dots q}_{n-1 \text{ fois}} \; p \; \underbrace{q \dots q}_{\text{de } n+1 \text{ à } k-1} \; p = q^{n-1}pq^{k-1-n}p = q^{k-2}p^2$$

⋆ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n, Y = 0) = 0$:

C'est l'événement "6 n'apparait qu'une seule fois et c'est au rang n". Avec le système complet $\{(Y = 0)\} \cup \{(Y = n)\}_{k \geq 2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X = n, Y = 0) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = n, Y = k) \\ &= P(X = n, Y = 0) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-2}p^2 \\ &= P(X = n, Y = 0) + pq^{n-1} \quad \text{(après calcul, laissé en exercice)} \end{aligned}$$

D'où $P(X = n) = P(X = n, Y = 0) + P(X = n)$ et donc $P(X = n, Y = 0) = 0$
(Ce résultat peut se rédémontrer un peu plus rapidement à l'aide des loi conditionnelles un peu plus tard.)

- Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} Supp((X,Y)) = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant n < k\} \\ P(X = n, Y = k) = p^2 q^{k-2} \quad \text{si } 1 \leqslant n < k \end{array}}$$

■ Exemple 4 :

Avec les variables de l'exemple précédent, calculons $P("X+Y \text{ impair"})$:

Par la décomposition en parité différente, on a

$$P("X+Y \text{ impair"}) = P(\underbrace{"X \text{ pair et } Y \text{ impair"}}_{A}) + P("X \text{ impair et } Y \text{ pair"})$$

Or, comme $P(Y=1)=0$, on a $\{(Y=2j+1)\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ sys. compl. de "Y imp.", d'où

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\left(X \text{ pair} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} Y=2j+1\right)\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(\underbrace{X \text{ pair}, Y=2j+1}_{A_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{j} P(X=2i, Y=2j+1)\right) \qquad \text{car } \{(X=2i)\}_{i=1\dots j} \text{ sys. q-c. de } A_j. \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{j} p^2 q^{2j+1-2}\right) = p^2 q \sum_{j=1}^{+\infty} j(q^2)^{j-1} \\
&= p^2 q \frac{1}{(1-q^2)^2} = p^2 q \frac{1}{(1-q)^2(1+q)^2} \\
&= \frac{q}{(1+q)^2} \qquad \text{car } 1-q=p
\end{aligned}$$

et de même (laissé en exercice), on a

$$P(\text{ "}X \text{ impair, } Y \text{ pair"}) = \frac{1}{(1+q)^2}$$

D'où la probabilité finale :

$$P("X+Y \text{ impair"}) = \frac{q+1}{(1+q)^2} = \frac{1}{1+q}$$

I-2 Loi marginale

Définition

Soit (X,Y) un couple de v.a.d.. La loi de X est appelée *première loi marginale* de (X,Y) et la loi de Y est appelée *deuxième loi marginale* de (X,Y).

Théorème 1

Soit (X,Y) un couple de v.a.d. de loi $p_{(X,Y)}$. Alors

$$\forall x \in Supp(X), \qquad p(X=x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p\big((X=x)\cap(Y=y_j)\big)$$

$$\forall y \in Supp(Y), \qquad p(Y=y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p\big((X=x_i)\cap(Y=y)\big)$$

? Exercice 1

On pose X et Y les premières et deuxième apparition de 6 dans une infinité de lancers. Déterminer la loi marginale de Y.

I-3 Loi conditionnelle

Définition

Soit (X,Y) un couple de v.a.d.

• Pour tout $y \in Supp(Y)$ tel que $p(Y=y)\neq 0$, on appelle *loi conditionnelle de X par-rapport à $[Y=y]$*, l'application

$$\begin{array}{ccc} Supp(X) & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & p_{[Y=y]}(X=x) = \frac{p((X=x)\cap(Y=y))}{p(Y=y)} \end{array}$$

• Pour tout $x \in Supp(X)$ tel que $p(X=x)\neq 0$, on appelle *loi conditionnelle de Y par-rapport à $[X=x]$*, l'application

$$\begin{array}{ccc} Supp(Y) & \to & [0;1] \\ y & \mapsto & p_{[X=x]}(Y=y) = \frac{p((X=x)\cap(Y=y))}{p(X=x)} \end{array}$$

■ Exemple 5 :

Reprenons l'exemple traité jusqu'ici.

• Soit $k \geqslant 2$. Loi conditionnelle de X par-rapport à $[Y=k]$:

Si $k \geqslant 2$, on a $p(X=n)\neq 0$. La loi conditionnelle sachant $[Y=k]$ est bien définie. Tout d'abord, si k fixé, alors $Supp\left(X_{/(Y=k)}\right) = [\![1;k-1]\!]$. Ensuite, si $n \in [\![1;k-1]\!]$, on a

$$p_{[Y=k]}(X=n) = \frac{p(Y=k, X=n)}{p(Y=k)} = \frac{q^{k-2}p^2}{(k-1)q^{k-2}p^2} = \frac{1}{k-1}$$

On a

$$X_{/(Y=k)} \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1;k-1]\!]} \qquad \textit{(intuitif ?)}$$

• Soit $n \geqslant 1$ loi conditionnelle de Y par-rapport à $[X=n]$:

Si $n \geqslant 1$, on a $p(X=n)\neq 0$). La loi conditionnelle sachant $[X=n]$ est bien définie. De plus,

$$Supp\left(Y_{/(X=n)}\right) = [\![n+1;+\infty[\![$$

et, pour tout $k \in [\![n+1;+\infty[\![$, on a

$$p_{[X=n]}(Y=k) = \frac{p(Y=k, X=n)}{p(X=n)} = \frac{q^{k-2}p^2}{q^{n-1}p} = pq^{k-n-1}$$

On se rend ainsi compte que

$$(Y-n)_{/(X=n)} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Remarque :

Dans l'exemple précédent, tout se passe comme si on recommençait à zéro à partir de $X = n$ *(phénomène "sans mémoire" !)*

■ **Exemple 6** :

On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n. On note X le résultat. On tire ensuite X fois de manière indépendante sur une cible avec une probabilité p de succès : "atteindre la cible". On note Y le nombre de succès.
Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$:

Pour i fixé, sachant que l'événement $(X = i)$ est réalisé, on observe que $Y/_{X=i}$ compte le nombre de succès dans une série d'épreuves de Bernoulli indépendantes de succès "atteindre son objectif" de probabilité p. Ainsi :

$$Y/_{X=i} \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$$

II Corrélation

II-1 Espérances

Dans cette section, on se donnera un couple de v.a.discrètes (X, Y). Dans le cadre de l'étude de la corrélation, on aura à étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}[XY]$. Il existe pour nous deux façons d'aborder cette question :

⋆ La première consiste à considérer la variable $Z = XY$ comme une variable habituelle, en cherchant

$$Supp(Z) = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\} \qquad \text{et} \qquad P(Z = z) \text{ pour tout } z \in Supp(Z)$$

puis valider l'existence et calculer $\mathbb{E}[Z]$ de la manière habituelle.

⋆ La deuxième consiste à utiliser un résultat calculable directement à partie de la loi conjointe :

Théorème 2 *de transfert*

Soient

- *X, Y deux variables finies de support indexé resp. par $[\![0, N]\!]$ et $[\![0, M]\!]$*
- *D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant $Supp(X, Y)$,*
- *$g : D \to \mathbb{R}$ une fonction*

alors

$$E(g(X,Y)) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} g(x_i, y_j)P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N} g(x_i, y_j)P(X = x_i, Y = y_j)$$

■ **Exemple 7** :

On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n. On note X le résultat. On tire ensuite X fois de manière indépendante sur une cible avec une probabilité p d'atteindre la cible. On note Y le nombre de succès.
Calculons $\mathbb{E}[XY^2]$ *(On admettra que* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$*)* :

D'après le théorème de transfert, on sait que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY^2] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} ij^2 P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij^2 P(X = i, Y = j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} ij^2 P(X = i)P_{X=i}(Y = j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{i} j^2 P_{X=i}(Y = j)\right)}_{\mathbb{E}[(Y/_{X=i})^2]}\end{aligned}$$

Or, on a $T = Y_{/(X=i)} \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$, et donc $\mathbb{E}[T^2] = V(T) + \mathbb{E}[T]^2 = ip(1-p) + i^2p^2$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY^2] &= \frac{p(1-p)}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{p^2}{n}\sum_{i=0}^{n} i^3\\ &= p(1-p)\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + p^2\frac{n(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{E}[XY^2] = p(n+1)\left(\frac{(1-p)(2n+1)}{6} + \frac{p\,n(n+1)}{4}\right)$$

? Exercice 2

En utilisant le théorème de transfert, montrer que dans l'exemple précédent,

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{n+1}{2}p \quad \text{ainsi que} \quad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{p(n+1)}{6}(3 + 2pn - 2p)\,.$$

(On pourra remarquer que $Y = X^0Y$.) En déduire $V(Y)$.

II-2 Covariance

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si la variable aléatoire $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance, on appelle *covariance du couple (X, Y)* la valeur

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big]$$

En général, on n'utilise pas cette formule pour trouver la covariance en pratique. En effet, la formule peut nettement se simplifier (et peut même faire office de définition)

Théorème 3 *(Formule de Huyghens-Koenig)*

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$ existent, alors le couple (X, Y) admet une covariance qui peut être calculée grâce à la formule

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

On peut même encore un peu simplifier les hypothèses de la formule de H-K dans certains cas :

Propriété 4

Soit (X, Y) un couple de v.a.discrètes. Si les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors l'espérance $\mathbb{E}[XY]$ existe.

Exemple 8 :

On effectue une série infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré et on note A le rang d'apparition du premier 1, et B le rang d'apparition du premier 2. Montrons que $\mathbb{E}[AB]$ existe.

On sait que $A, B \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$. On en déduit que A et B admettent des moments d'ordre 2, ainsi on peut dire que $\mathbb{E}[AB]$ existe.
(Mais on n'a pas la valeur pour autant. . . . Le calcul est HP mais pour information, on a $\mathbb{E}[AB] = \frac{6-2p}{p^2}$)

Corollaire

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors le couple (X, Y) admet une covariance et

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Exemple 9 :

Si A et B sont les moments de première apparition respectivement de 1 et de 2 dans une série infinie de lancers, cherchons $Cov(A, B)$ en admettant que l'on connait $\mathbb{E}[AB]$:

D'après le début de l'exemple déja traité précédemment, on sait que $A, B \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ et admettent chacune un moment d'ordre 2. Ainsi, $\mathbb{E}[AB]$, $Cov(A, B)$, $\mathbb{E}[A]$ et $\mathbb{E}[B]$ existent, avec comme formule

$$Cov(A, B) = \mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\,\mathbb{E}[AB]$$

Après calcul de $\mathbb{E}[AB]$ (admis) on trouverait (avec $p = \frac{1}{6}$)

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{6-2p}{p^2}$$

De plus, on sait que $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = \frac{1}{p} = 6$. D'où

$$Cov(A, B) = \frac{6-2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5-2p}{p^2} = 132$$

Remarque :

Si les variables sont finies, alors la covariance existe toujours.

Exercice 3

On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n. On note X le résultat. On tire ensuite X fois de manière indépendante sur une cible avec une probabilité d'atteindre son objetif de p. On note Y le nombre de succès. Déterminer $Cov(X, Y)$.

Propriété 5

Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

- $Cov(X, X) = V(X)$
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

Propriété 6 (bilinéarité de la covariance)

Soient X, Y des v.a.d définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

- $Cov(\cdot, Y) : X \mapsto Cov(X, Y)$ est linéaire au sens suivant :
  Si X, X' sont deux v.a.d. telles que $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathbb{E}[X'Y]$ existent, alors
  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $Cov(\alpha X + \beta X', Y) = \alpha\, Cov(X, Y) + \beta\, Cov(X', Y)$
- $Cov(X, \cdot) : Y \mapsto Cov(X, Y)$ est linéaire au sens suivant :
  Si Y, Y' sont deux v.a.d. telles que $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathbb{E}[XY']$ existent, alors
  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha\, Cov(X, Y) + \beta\, Cov(X, Y')$

Exemple 10 :

Soient X, Y deux variables discrètes admettant la même variance. Montrons que $Cov(X + Y, X - Y) = 0$:

Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned} Cov(X+Y, X-Y) &= Cov(X, X-Y) + Cov(Y, X-Y) \\ &= \underbrace{Cov(X,X)}_{V(X)} - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - \underbrace{Cov(Y,Y)}_{V(Y)} \\ &= V(X) - V(Y) \quad \text{par symétrie de la covariance} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 7

Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Remarque :

Ce théorème permet aussi dans certains cas de calculer $Cov(X, Y)$ avec la formule :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2}\left(V(X + Y) - V(X) - V(Y)\right)$$

Exemple 11 :

On effectue n lancers indépendants d'une même dé équilibré. On note X le nombre de fois où on obtient 1 et Y le nombre de fois où on obtient 2. On cherche à trouver $Cov(X, Y)$.

Tout d'abord, on remarque que X et Y sont deux variables finies telles que

$$X, Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \quad \text{avec } p = \frac{1}{6}$$

Ceci garantit l'existance des moments d'ordre 2 de X, Y et valide fonc la formule

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2}\left(V(X + Y) - V(X) - V(Y)\right)$$

De plus, la variable $X + Y$ correspond au nombre total de fois où on rencontre 1 ou 2. Or, comme on ne peut pas avoir en même temps 1 et 2, ceci est en réalité, le nombre de réalisation du succès "obtenir 1 ou 2" dans une série de n tentatives indépendantes. Ainsi, on sait que

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{3} = 2p$$

D'où

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2}\left(n\alpha(1 - \alpha) - 2np(1 - p)\right) = -np^2 = -\frac{n}{36}$$

Corollaire

Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

$$|Cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$

II-3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Soient X, Y des v.a.d. sur un même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**. On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y la valeur

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

■ Exemple 12 :

Revenons à l'exemple des tirs sur une cible. (On admettra que $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.) On a alors, grâce aux calculs effectués (dans les exemples et exercices précédents)

$$r(X,Y) = \frac{p\frac{(n+1)(n-1)}{12}}{\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}\sqrt{\frac{p(n+1)}{12}}(6+pn-7p)} = \sqrt{\frac{p(n-1)}{pn+6-7p}}$$

Propriété 8

Soient X, Y des v.a.d.

- sur un même espace probabilisé,
- admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**,

$$-1 \leqslant r(X,Y) \leqslant 1$$

Propriété 9

Soient X, Y des v.a.d.

- sur un même espace probabilisé,
- admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**,

alors

$$|r(X,Y)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } P(Y = aX+b) = 1$$

II-4 Indépendance

Définition

Étant donné un couple de variables aléatoires discrètes (X,Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, on dit que X et Y sont *indépendantes* si

$$p\big((X=x)\cap(Y=y)\big) = p(X=x)\,p(Y=y) \qquad \forall x \in Supp(X), y \in Supp(Y)$$

■ Contre-Exemple(s) :

On lance un dé une infinité de fois. On reprend les variables aléatoires X et Y donnant le rang de première et deuxième apparition de 6. Alors

$$P(X=5\cap Y=3) = 0 \neq \underbrace{P(X=5)}_{\neq 0}\underbrace{P(Y=3)}_{\neq 0}$$

Les deux variables aléatoires ne peuvent donc pas être indépendantes.

? Exercice 4

On lance une infinité de fois deux dés de manière indépendante. On note X le rang de première apparition de 6 sur le premier dé et Y le rang de première apparition d'un double. (Y vaut 0 s'il n'y a jamais de double.) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Propriété 10

X et Y sont indépendantes ssi l'une des assertions suivantes est vérifiée

- $X_{/Y=y}$ a même loi que X pour tout $y \in Supp(Y)$ de probabilité non nulle.
- la loi de $X_{/Y=y}$ est indépendante de y.

■ Exemple 13 :

Dans l'exemple de X et Y resp. les $1^{\text{ères}}$ et $2^{\text{èmes}}$ apparition du 6 dans une série infinie de lancers indépendants, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X_{/(Y=n)} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,\dots,n\}}$$

La loi de $X_{/(Y=n)}$ dépend donc de la valeur de Y, ce qui signifie que les variables X et ne sont pas indépendantes. (On s'en doutait un peu !!).

■ Exemple 14 :

Si on a des variables X, Y telles que pour tout $n \in Supp(Y)$,

$$X_{/(Y=n)} \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Alors X et Y sont indépendantes et de surcroit, $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Remarque :

Le résultat précédent est évidemment également vrai en échangeant X et Y.

Lemme 11

Soit (X,Y) un couple de v.a.d. indépendantes, alors,

- *pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $X-a$ et $Y-b$ sont indépendantes.*
- *mieux, pour toutes fonctions réelles g, h, les v.a.d. $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.*

Théorème 12

Soit (X,Y) un couple de v.a.d.

- *Si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent*
- *Si X et Y sont indépendantes,*

alors $\mathbb{E}[XY]$ existe et

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

`Démonstration :` admise. □

LA RÉCIPROQUE DE L'INDÉPENDANCE EST FAUSSE !

Exemple : Soit X la variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$.

$$p(X=-1) = p(X=0) = p(X=1) = \frac{1}{3}.$$

On pose $Y = X^2$, d'où

$$Supp(Y) = \{0,1\}, \quad p(Y=0) = \frac{1}{3}, \; p(Y=1) = \frac{2}{3}$$

Y et X sont clairement non indépendants ! *(pour preuve, on peut par exemple vérifier que $p(X=0\cap Y=0) \neq p(X=0)p(Y=0)$).*
Or, notons que $XY = X$, ainsi,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] = 0 = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Corollaire

Soit (X,Y) un couple de v.a.d.

- *Si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent*
- *Si X et Y sont indépendantes,*

alors $Cov(X,Y)$ existe et

$$Cov(X,Y) = 0$$

Corollaire

Soit (X,Y) un couple de v.a.d.

- *Si X et Y admettent un moment d'ordre 2,*
- *Si X et Y sont indépendantes,*

alors $V(X+Y)$ existe et

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Corollaire

Soient X, Y des v.a.d.

- *sur un même espace probabilisé,*
- *admettant chacune un moment d'ordre 2* **non nul**,
- **indépendantes**,

alors $$r(X,Y) = 0.$$

III Convolution

III-1 Généralités

Dans cette section, on se donne toujours X et Y deux variables aléatoires discrètes et on note

$$Supp(X) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad Supp(Y) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$$

où les x_i (puis les y_j) sont deux à deux distincts de probabilité nulle.

But : Le but de ce paragraphe est de pouvoir déterminer la loi de la v.a.d. $X+Y$.

Stratégie : Utiliser la partition d'événements $\{(Y=y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ou $\{(X=x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$

En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(X+Y=x) &= P\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (X+Y=x)\cap(X=x_i)\right) = P\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (x_i+Y=x)\cap(X=x_i)\right) \\ &= P\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (Y=x-x_i)\cap(X=x_i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P\Big((Y=x-x_i)\cap(X=x_i)\Big) \end{aligned}$$

Par exemple, si X et Y sont indépendantes, alors

$$P(X+Y=x) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=x-x_i)P(X=x_i)$$

Définition et Proposition

Soit (X,Y) un couple de v.a.d. de loi respectives $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(Y)$. On appelle *convolution* des lois de X et Y on note $\mathcal{L}(X)\star\mathcal{L}(Y) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$\mathcal{L}(X)\star\mathcal{L}(Y)(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=x_i)P(Y=x-x_i)$$

où la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} P(X=x_i)P(Y=x-x_i)$ est convergente

Théorème 13

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. **indépendantes**, *alors la loi de $X+Y$ est définie par*

$$\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y).$$

Cas particuliers :

- Si X, Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes prenant des valeurs dans $\mathbb{Z}$:

Alors :

⋆ $Supp(X+Y) \subset \mathbb{Z}$, d'où, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, on a $P(X+Y=x)=0$.

⋆ Si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$P(X+Y=k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P(X=k-j)P(Y=j)$$

- Si X, Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$:

Alors :

⋆ $Supp(X+Y) \subset \mathbb{Z}$, d'où, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, on a $P(X+Y=k)=0$

⋆ Si $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{P(X=k-j)}_{=0 \text{ si } k-j<0} P(Y=j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(X=x-j)P(Y=j) \end{aligned}$$

III-2 Exemples

III.2-a) Convolution de Lois binomiales

Théorème 14

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$. Alors $\quad \mathcal{B}(n,p) \star \mathcal{B}(m,p) = \mathcal{B}(n+m,p).$

Ou autrement dit

Théorème 15

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$. Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$$

alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$$

III.2-b) Convolution de lois de Poisson

Théorème 16

Soient $\lambda, \mu > 0$. Alors $\quad \mathcal{P}(\lambda) \star \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\lambda+\mu).$

Corollaire

Soient $\lambda, \mu > 0$. Si X et Y sont deux v.a.d. indépedantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$$

alors

$$X+Y \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$$